Cap 16.1-2 Moti oscillatori

Alcuni tipi di forze o alcune situazioni danno luogo a dei moti di tipo oscillante ovvero a dei moti che si ripetono regolarmente.

Una proprietà caratterizzante il moto oscillatorio è il suo periodo T ovvero il tempo necessario a compiere una oscillazione intera. Altra grandezza caratteristica è la frequenza ν ovvero il numero di oscillazioni al secondo legato al periodo T dalla relazione $T = \frac{1}{\nu}$

Qualunque moto che si ripeta ad intervalli regolari è detto periodico o armonico.

Consideriamo ad esempio una situazione di posizione oscillante di un punto materiale che abbia una posizione del tipo: $x(t) = x_M cos(\omega t + \phi)$ $x_M, \omega\phi$ sono costanti ed un punto che ha coordinate che seguono questa legge è detto avere **moto armonico semplice**.

Le costanti $x_M, \omega\phi$ hanno nomi e significati ben precisi:

- x_M è una costante positiva detta <u>AMPIEZZA</u> e rappresenta la massima ampiezza nell'oscillazione;
- la quantità argomento della funzione coseno è tutta insieme detta **fase** del moto;
- la ω è detta **pulsazione** ed è legata al periodo.

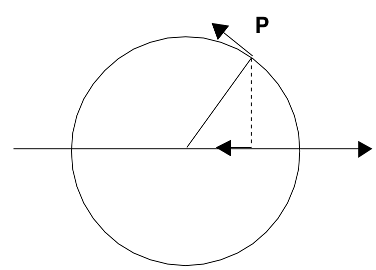
Infatti se vogliamo ricavare il periodo di oscillazione dobbiamo Vedere dopo quanto tempo un punto con moto armonico semplice ritorna alla sua posizione iniziale:
$x(t) = x(t+T) \Rightarrow$
$x_M cos(\omega t + \phi) = x_M cos(\omega(t+T) + \phi) \Rightarrow$
$x_M cos(\omega t + \phi) = x_M cos(\omega t + \omega T + \phi) \Rightarrow$ e poichè la funzione cos assume gli stessi valori ogni 2π allora si deve avere che $\omega T = 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{T} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\omega} \text{ e } \nu = \frac{\omega}{\mathbf{2\pi}}}$$

e la ϕ è la fase quando t=0.

16.7 - moto armonico e moto circ. uniforme

Il moto armonico semplice è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro dello stesso cerchio su cui si svolge il moto.



Velocità nel moto armonico semplice

La velocità si ottiene derivando l'espressione della posizione rispetto al tempo:

$v_x(t) = \frac{d}{dt}(x(t)) = -x_M\omega \sin(\omega t + \phi)$ e analogamente l'accelerazione è:

$$a(t) = \frac{d}{dt}(v(t)) = -\omega^2 x_M cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

quindi nel moto armonico semplice l'accelerazione è proporzionale allo spostamento: $\mathbf{a} = -\omega^{\mathbf{2}}\mathbf{x}$ che si può anche scrivere come: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ovvero $\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2}} + \omega^{\mathbf{2}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che è una equazione (**) differenziale la cui soluzione è sempre del tipo $x(t) = x_M cos(\omega t + \phi)$.

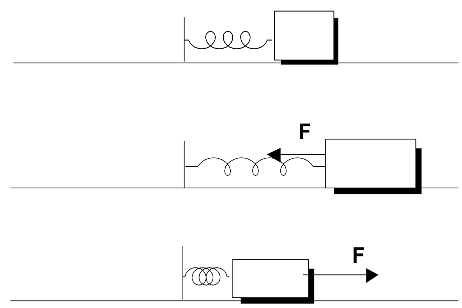
I moti che hanno questo legame tra posizione ed accelerazione ($\mathbf{a} = -\alpha\mathbf{x}, \quad \alpha > \mathbf{0}$) o che soddisfano questa equazione differenziale sono tutti **armonici semplici**

(**) **Per una verifica basta sostituire le espressioni trovate di a(t) nell'eq. differenziale:**

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -\omega \mathrm{x_M} \sin(\omega \mathrm{t} + \phi)$$

$$\frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}) = -\omega^2 \mathrm{x_M} \cos(\omega \mathrm{t} + \phi) = -\omega^2 \mathrm{x(t)}$$

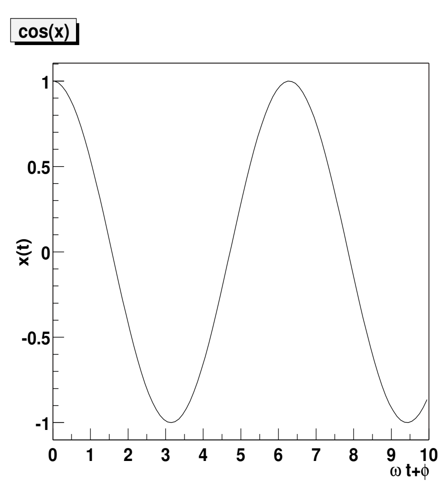
7.5 - Molla e forze elastiche



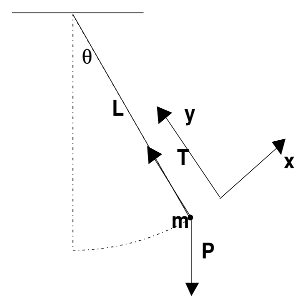
La figura in alto mostra una molla a riposo. Se la allunghiamo (figura centrale) la molla esercita una forza di richiamo che tende a riportare la molla verso la sua posizione a riposo. Analogamente se invece comprimiamo la molla essa reagisce esercitando una forza repulsiva (foto in basso). In definitiva troviamo che la forza dipende dalla posizione e sperimentalmente si trova che la forza esercitata dalla molla è $\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{k}\vec{\mathbf{d}}$ detta **Legge di Hooke**. Il segno meno evidenzia che la forza ha sempre verso opposto allo spostamento. La costante **k** è detta **costante elastica** della molla.

7.5-16.3 Oscillazioni con le molle

Consideriamo di nuovo il blocchetto di massa M legato ad una molla che ha uno estremo vincolato (vedi figura prec). Abbiamo che spostando di un tratto x il blocchetto esso sarà soggetto ad una forza di richiamo $F = -kx$ e per la 2^a Legge della Dinamica di deve avere $F = -kx = Ma$ da cui $a = -\frac{k}{M}x$ e chiamando $\omega^2 = \frac{k}{M}$ troviamo $a = -\omega^2 x$ che in base a quanto detto nella precedente trasparenza significa che il moto risultante sarà **armonico semplice** ovvero risulterà che la posizione x(t) avrà una legge del tipo $x(t) = x_M cos(\omega t + \phi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e di conseguenza il periodo di oscillazione sarà $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$



16.6 Pendolo semplice



Un oggetto di massa **m** è fissato tramite una fune come in figura. Costruiamo il digramma delle forze agenti sul punto materiale non appena l'oggetto è spostato dalla posizione di equilibrio che è la verticale. Le forze agenti sono la tensione del filo $\vec{T}$ e la forza peso $\vec{P}$. Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x tangente all'arco descritto dall'oggetto (se lasciato libero) e y come in figura. La 2^a Legge ci dice che $\vec{\mathrm{T}} + \vec{\mathrm{P}} = \mathrm{m}\vec{a}$ che possiamo scomporre lungo gli assi ovvero come componenti normali e tangenziali:

comp. tangenziale (x) : $-mgsin\theta = ma_T$
comp. normale (y) : $T - mgcos\theta = ma_c$ (a_c è l'accelerazione centripeta) La seconda equazione diventa $T = mgcos\theta + m\frac{v^2}{L}$
Dalla prima si ricava invece il tipo di moto: ricordiamo che nel moto circolare vario l'accelerazione tangenziale è $a_T = \alpha R = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$ otteniamo (nel nostro caso L=R):
$-gsin\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ e quando sono piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \Rightarrow$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ che è l'eq. diff. del moto armonico.
Alternativa Per piccoli angoli $\mathbf{sin}\theta \simeq \theta \simeq \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{L}}$, s è la lunghezza dell'arco inoltre per piccoli angoli l'accelerazione tangenziale si può scrivere come $a_T = \frac{d^2s}{dt^2}$. Riscrivendo la prima componente diventa $-g\frac{s}{L} = m\frac{d^2s}{dt^2}$ e riaggiustando i termini:
$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{L}s = 0$

In definitiva otteniamo l'eq. di un moto armonico nel quale $\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e la posizione sarà $\theta(t) = \theta_0 sin(\omega t + \phi)$ oppure $s(t) = s_0 sin(\omega t + \phi)$

Il periodo di oscillazione quindi è

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Il periodo di oscillazione del pendolo **non dipende** dalla massa dell'oggetto appeso alla fune ma solo dalla lunghezza della fune (e da g)

N.B. Attenzione a non confondere la ω **pulsazione** del moto armonico con **la velocità angolare** ω del moto circolare (c'è un collegamento tra le due come abbiamo visto ma sono due grandezze differenti anche come unità di misura).